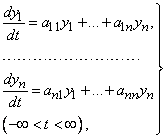
**41.Однородные системы линейных д.у. с постоянными коэффициентами. Случай кратных корней.**

Будем искать решение линейной однородной системы с постоянными коэффициентами http://sernam.ru/htm/lect_math3/math3_41.files/image001.gif

                                      (1)

или

http://sernam.ru/htm/lect_math3/math3_41.files/image003.gif,                                            (1’)

где http://sernam.ru/htm/lect_math3/math3_41.files/image004.gif - заданная числовая [матрица](http://sernam.ru/lect_math1.php?id=5), в следующем виде:

http://sernam.ru/htm/lect_math3/math3_41.files/image005.gif,                              (2)

или

http://sernam.ru/htm/lect_math3/math3_41.files/image006.gif.                                              (2’)

Числа http://sernam.ru/htm/lect_math3/math3_41.files/image007.gif подлежат определению.

Конечно, числа

http://sernam.ru/htm/lect_math3/math3_41.files/image008.gif

дают тривиальное решение системы (1):

http://sernam.ru/htm/lect_math3/math3_41.files/image009.gif.

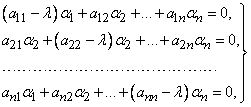
Но нас интересуют нетривиальные решения, соответствующие ну равным нулю векторам

http://sernam.ru/htm/lect_math3/math3_41.files/image010.gif.

Имеем

http://sernam.ru/htm/lect_math3/math3_41.files/image011.gif.

Подставляя функции http://sernam.ru/htm/lect_math3/math3_41.files/image012.gif и их [производные](http://stu.sernam.ru/book_msh.php?id=117) в (1), после сокращения на http://sernam.ru/htm/lect_math3/math3_41.files/image013.gif и переноса членов в одну сторону, получим

          (3)

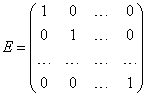
или в матричной форме

http://sernam.ru/htm/lect_math3/math3_41.files/image015.gif,                                             (3’)

или

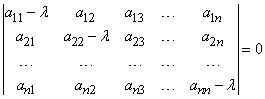
http://sernam.ru/htm/lect_math3/math3_41.files/image016.gif,                                        (4)

где http://sernam.ru/htm/lect_math3/math3_41.files/image010.gif, а



- [единичная матрица](http://sernam.ru/book_matrix.php?id=5).

Для того, чтобы система (3) имела нетривиальное решение, необходимо и достаточно, чтобы ее [определитель](http://sernam.ru/book_e_math.php?id=96) был равен нулю:

                      (5)

Уравнение (5) называется [характеристическим уравнением](http://stu.sernam.ru/book_algebra.php?id=186) системы (1). Из уравнения (5) мы и находим те значенияhttp://sernam.ru/htm/lect_math3/math3_41.files/image019.gif, при которых система (4) имеет нетривиальные решения http://sernam.ru/htm/lect_math3/math3_41.files/image020.gif.

Левая часть (5) есть [многочлен](http://edu.sernam.ru/book_m_cat.php?id=22) степени http://sernam.ru/htm/lect_math3/math3_41.files/image021.gif по переменной http://sernam.ru/htm/lect_math3/math3_41.files/image019.gif. С учетом кратности этот многочлен имеет http://sernam.ru/htm/lect_math3/math3_41.files/image021.gif корней:

http://sernam.ru/htm/lect_math3/math3_41.files/image022.gif.                                   (6)

Пусть теперь [характеристическое уравнение](http://stu.sernam.ru/book_algebra.php?id=186) (5) системы (1) имеет корень http://sernam.ru/htm/lect_math3/math3_41.files/image069.gif кратности http://sernam.ru/htm/lect_math3/math3_41.files/image070.gif. Сведем систему (1) к одному уравнению http://sernam.ru/htm/lect_math3/math3_41.files/image021.gif- го порядка относительно функции http://sernam.ru/htm/lect_math3/math3_41.files/image071.gif. Это уравнение и система (1) имеют одно и то же[характеристическое уравнение](http://stu.sernam.ru/book_algebra.php?id=186) (доказательство ниже). Но тогда, как мы знаем, корню http://sernam.ru/htm/lect_math3/math3_41.files/image069.gif  кратности http://sernam.ru/htm/lect_math3/math3_41.files/image070.gif соответствует решение http://sernam.ru/htm/lect_math3/math3_41.files/image021.gif- го порядка вида

http://sernam.ru/htm/lect_math3/math3_41.files/image072.gif,

где http://sernam.ru/htm/lect_math3/math3_41.files/image073.gif - произвольные постоянные. Таким образом,

http://sernam.ru/htm/lect_math3/math3_41.files/image074.gif,

где http://sernam.ru/htm/lect_math3/math3_41.files/image075.gif есть [многочлен](http://edu.sernam.ru/book_m_cat.php?id=22) степени http://sernam.ru/htm/lect_math3/math3_41.files/image076.gif.

Рассуждая аналогично, мы и другие функции http://sernam.ru/htm/lect_math3/math3_41.files/image054.gif можем выразить в форме

http://sernam.ru/htm/lect_math3/math3_41.files/image077.gif,                                     (12)

где http://sernam.ru/htm/lect_math3/math3_41.files/image078.gif многочлены степени http://sernam.ru/htm/lect_math3/math3_41.files/image076.gif.

Каждая из функций http://sernam.ru/htm/lect_math3/math3_41.files/image054.gif удовлетворяет указанному [дифференциальному уравнению](http://sernam.ru/book_e_math.php?id=40) http://sernam.ru/htm/lect_math3/math3_41.files/image021.gif- го порядка, каковы бы ни были коэффициенты многочлена http://sernam.ru/htm/lect_math3/math3_41.files/image078.gif.

Остаются среди многочленов http://sernam.ru/htm/lect_math3/math3_41.files/image079.gif отобрать такие, чтобы соответствующие им функции http://sernam.ru/htm/lect_math3/math3_41.files/image080.gif совместно удовлетворяли системе (1). Для этого надо подставить http://sernam.ru/htm/lect_math3/math3_41.files/image081.gif в систему (1), сократить ее на http://sernam.ru/htm/lect_math3/math3_41.files/image082.gifи сравнить коэффициенты при одинаковых степенях http://sernam.ru/htm/lect_math3/math3_41.files/image083.gif. Искомые коэффициенты будут зависеть от http://sernam.ru/htm/lect_math3/math3_41.files/image070.gif произвольных постоянных. Можно иногда порекомендовать взять [многочлен](http://edu.sernam.ru/book_m_cat.php?id=22) http://sernam.ru/htm/lect_math3/math3_41.files/image075.gif произвольным, и тогда коэффициенты остальных многочленов http://sernam.ru/htm/lect_math3/math3_41.files/image084.gif уже определятся однозначно через коэффициенты http://sernam.ru/htm/lect_math3/math3_41.files/image085.gif.

Однако возможно, что на этом пути мы придем к противоречию, показывающему, что на самом деле в данном случае некоторые коэффициенты многочлена http://sernam.ru/htm/lect_math3/math3_41.files/image085.gif равны нулю и их считать произвольными нельзя.

Подобным образом рассуждаем и в отношении других [кратных корней](http://edu.sernam.ru/book_sm_math1.php?id=186) характеристического уравнения, если таковые у данного уравнения имеются. Решения, соответствующие простым корням, ищем в виде (8), как объяснялось выше.

Чтобы получить общее решение системы (1), надо взять сумму указанных решений ([вектор-функций](http://sernam.ru/lect_math2.php?id=63)).

В простых случаях можно искать решение сразу в виде суммы подобных решений.